Examen HAVO

2022

tijdvak 1
vrijdag 13 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 16 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 75 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

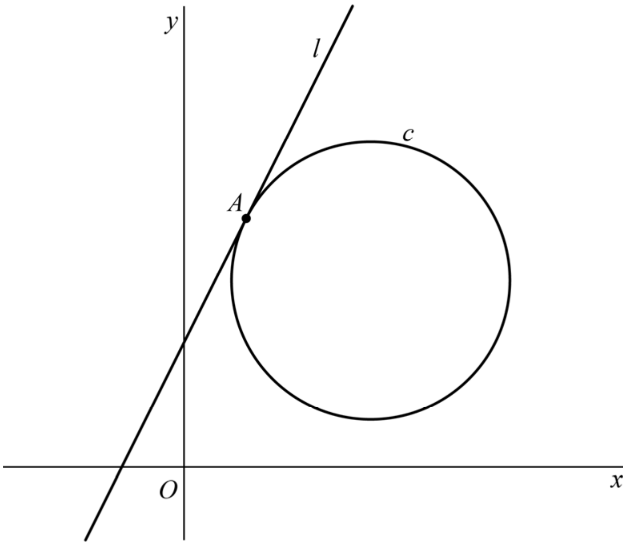
HA-1025-a-22-1-o

Ga verder op de volgende pagina.

Raaklijn aan cirkel

De cirkel c is gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 = 6x + 6y - 13$. De lijn l met vergelijking $y = 2x + 2$ raakt de cirkel in het punt A. Zie figuur 1.

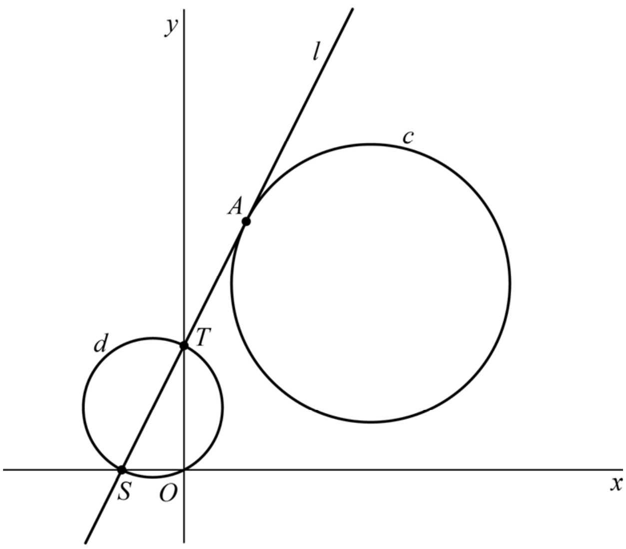
figuur 1



4p **1** Bereken exact de coördinaten van A.

l snijdt de x-as in het punt S en de y-as in het punt T.
Cirkel d is de cirkel met middellijn ST. Zie figuur 2.

figuur 2



5p **2** Bewijs dat d door O gaat.

Versturen van data

Data kan via verschillende kanalen verstuurd worden, bijvoorbeeld via een kabel of draadloos.

Bij het versturen van data is het belangrijk dat deze foutloos verstuurd wordt. Data kan foutloos verstuurd worden als de zogeheten **kanaalcapaciteit** groot genoeg is.

De kanaalcapaciteit is de maximale hoeveelheid data die per seconde over een kanaal overgedragen kan worden.
Een formule waarmee de kanaalcapaciteit bepaald kan worden, is

$$C = B \cdot {}^{2}\log(1+R) \qquad \text{(formule 1)}$$

Hierin is
- C de kanaalcapaciteit in bits per seconde (bps);
- B de bandbreedte in hertz (Hz);
- R de signaal-ruisverhouding.

Deze signaal-ruisverhouding is de verhouding tussen de sterkte van het gewenste signaal en de sterkte van de aanwezige ruis.

Met de formule

$$S = 10 \cdot {}^{10}\log(R) \qquad \text{(formule 2)}$$

kan R omgerekend worden naar decibel (dB).

In 2016 had een goed werkende draadloos-internetverbinding vaak een bandbreedte van $20 \cdot 10^6$ Hz en een waarde van S van 40 dB.

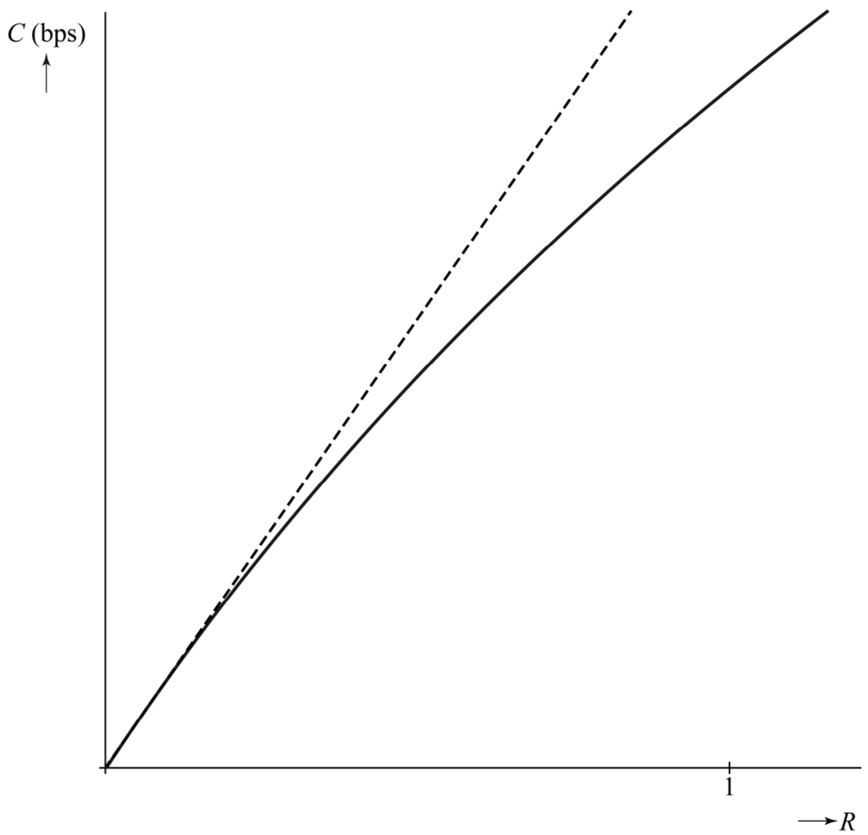
5p **3** Bereken met behulp van de bovenstaande formules de kanaalcapaciteit van deze verbinding. Geef je eindantwoord in miljoenen bps.

Als de ruis (veel) sterker is dan het signaal, dan is R (erg) klein. Voor zulke kleine waarden van R werkt men in de praktijk met de volgende benadering voor C:

$$C = 1{,}44 \cdot B \cdot R \qquad \text{(formule 3)}$$

In figuur 1 zijn voor $B = 1000$ de grafieken van formules 1 en 3 weergegeven, waarbij de grafiek van formule 3 gestippeld is.

figuur 1



In figuur 1 is te zien dat voor groter wordende R de benadering steeds slechter wordt. Men vindt deze benadering acceptabel als het verschil tussen de waarde van C volgens formule 3 en de waarde van C volgens formule 1 maximaal 1% is van de waarde van C volgens formule 1.

3p **4** Bereken in het geval dat $B = 1000$ tot welke waarde van R dit het geval is. Rond de door jou gevonden waarde van R af op drie decimalen.

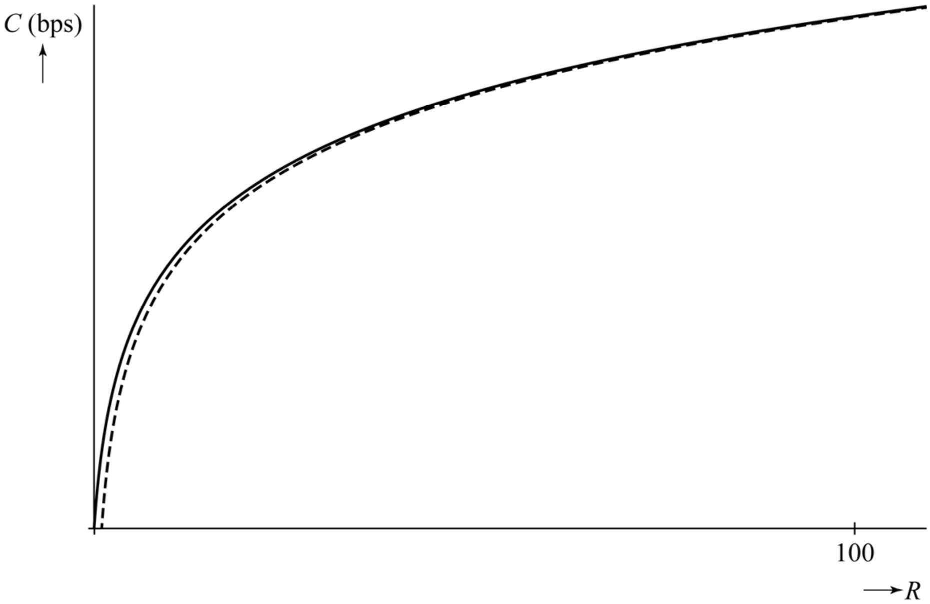
Ook als het signaal veel sterker is dan de ruis, dat wil zeggen voor grote waarden van R, wordt er in de praktijk vaak met een benadering voor C gewerkt.

Voor grote waarden van R geldt $1+R \approx R$. In dat geval kan formule 1 benaderd worden door:

$$C = B \cdot {}^{2}\log(R) \qquad \text{(formule 4)}$$

In figuur 2 zijn voor een bepaalde waarde van B de grafieken van de formules 1 en 4 weergegeven, waarbij de grafiek van formule 4 gestippeld is.

figuur 2



Met behulp van formules 2 en 4 kan voor grote waarden van R de volgende formule voor C opgesteld worden:

$$C = 0{,}332 \cdot B \cdot S$$

Het getal 0,332 in deze formule is een afgerond getal.

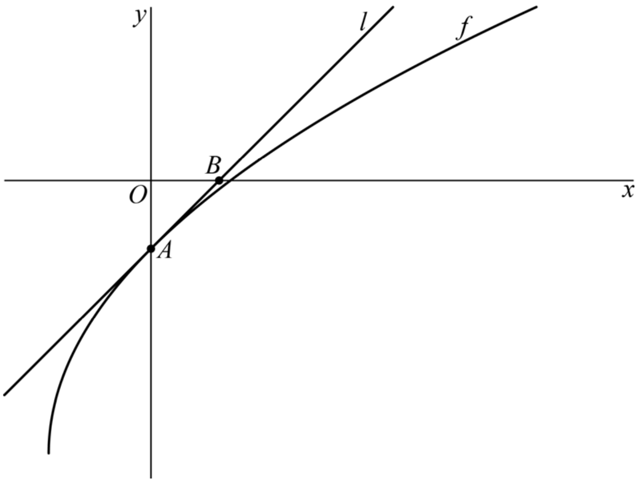
4p **5** Toon de juistheid van deze formule aan.

Wortelfunctie en transformatie

De functie f is gegeven door $f(x) = -8 + 2\sqrt{3x+9}$.

De grafiek van f snijdt de y-as in het punt A. De lijn l raakt de grafiek van f in A. De lijn l snijdt de x-as in het punt B. Zie figuur 1.

figuur 1

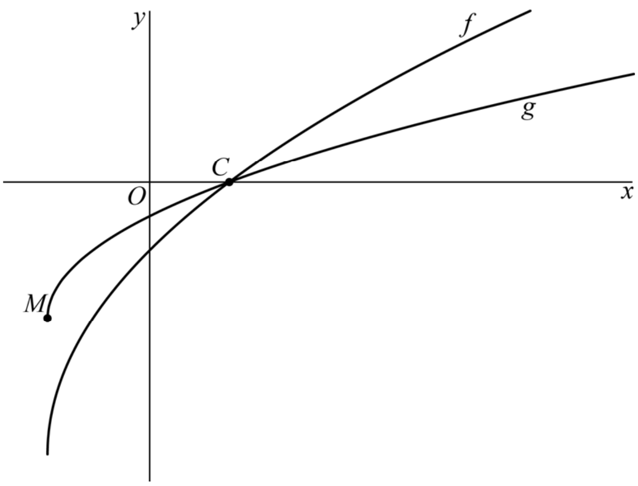


Er geldt $OA = OB$.

6p **6** Bewijs dit.

De grafiek van de functie g ontstaat uit de grafiek van f door middel van een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met een positieve factor a.
Het punt M is het randpunt van de grafiek van g en het punt C is het snijpunt van de grafieken van f en g met de x-as. Zie figuur 2.
De lengte van het lijnstuk MC is $6\frac{2}{3}$.

figuur 2



7p **7** Bereken exact de waarde van a.

Windmolens

Een windmolen kan de bewegingsenergie van de wind omzetten in elektrische energie. De hoeveelheid elektrische energie die een windmolen produceert, is afhankelijk van de windsnelheid. Hoe harder het waait, hoe meer elektrische energie een windmolen kan produceren.

Omdat er energie uit de wind gehaald is en omgezet is in elektrische energie, is de bewegingsenergie van de wind achter een windmolen kleiner dan ervoor. Dus is de windsnelheid achter de windmolen ook kleiner dan de windsnelheid vóór de windmolen.

De energie in joule (J) die een windmolen per seconde produceert, wordt gegeven door de formule:

$$E = \tfrac{1}{4} \cdot c \cdot v^3 \cdot \left(1 - \left(\frac{w}{v}\right)^3 - \left(\frac{w}{v}\right)^2 + \left(\frac{w}{v}\right)\right) \qquad \text{(formule 1)}$$

Hierin is
- E de energie die de molen per seconde produceert in J;
- c een (positieve) constante die hoort bij de windmolen, deze constante is onder andere afhankelijk van de grootte en vorm van de wieken;
- v de snelheid van de wind vóór de windmolen in m/s;
- w de snelheid van de wind achter de windmolen in m/s.

Bij een wind met een snelheid van 10 m/s vóór de windmolen produceert de windmolen Amstelvogel in Ouderkerk aan de Amstel, zie de foto, elke seconde 1,21 miljoen J. De waarde van c die hoort bij deze windmolen is 5116.

foto

3p **8** Bereken de snelheid van de wind achter de windmolen in m/s. Geef je eindantwoord in één decimaal.

We gaan nu weer kijken naar windmolens in het algemeen.
Een windmolen kan niet alle energie uit de wind halen, want dan zou de lucht achter de windmolen stilstaan. Het blijkt dat de maximale hoeveelheid energie die een windmolen uit de wind kan halen alleen afhangt van de verhouding tussen de windsnelheden vóór en achter de molen, dus de verhouding tussen v en w.

Stel $p = \frac{w}{v}$, dan kan formule 1 geschreven worden als:

$$E = \tfrac{1}{4} \cdot c \cdot v^3 \cdot \left(1 - p^3 - p^2 + p\right) \qquad \text{(formule 2)}$$

Bij een constante waarde van v is E maximaal als $1 - p^3 - p^2 + p$ maximaal is.

Voor elke constante c en v wordt de maximale waarde voor E bereikt bij $p = \tfrac{1}{3}$.

4p **9** Bewijs dat deze maximale waarde voor E inderdaad bereikt wordt bij $p = \tfrac{1}{3}$.

De maximale waarde voor E noemen we E_{max}.

De energie van wind met een snelheid v die per seconde wordt opgevangen door een windmolen waarvan c de constante is, wordt gegeven door:

$$E_{\text{wind}} = \tfrac{1}{2} \cdot c \cdot v^3$$

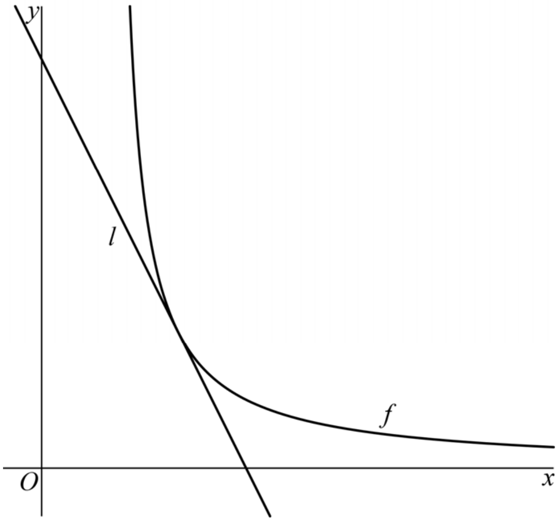
Het maximale percentage van de energie die een windmolen uit de wind kan halen is $\frac{E_{\text{max}}}{E_{\text{wind}}} \cdot 100\%$.

3p **10** Bereken dit percentage. Geef je eindantwoord in hele procenten.

Hyperbool

Op het domein $\left\langle \frac{1}{2}, \rightarrow \right\rangle$ is de functie f gegeven door $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$.
De lijn l met richtingscoëfficiënt −2 raakt de grafiek van f. Zie figuur 1.

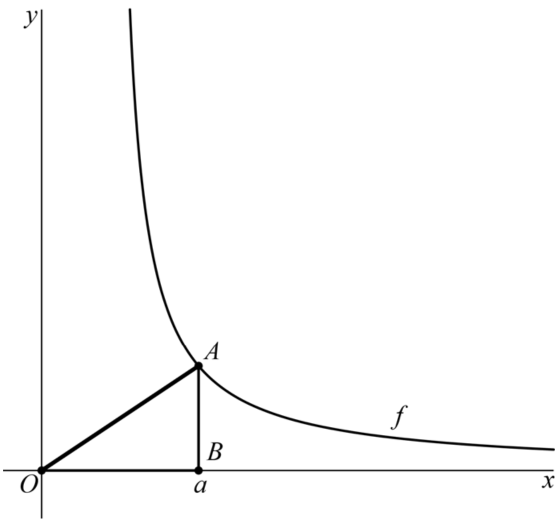
figuur 1



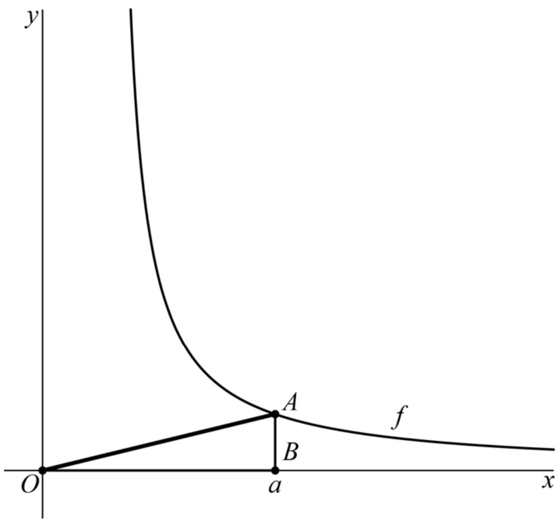
8p **11** Bereken exact het snijpunt van l met de y-as.

Het punt A met x-coördinaat a is een willekeurig punt op de grafiek van f.
Het punt B ligt op de x-as en heeft ook x-coördinaat a. Bij elke waarde van a hoort een driehoek OAB. Zie figuur 2 en figuur 3 voor twee mogelijkheden.

figuur 2



figuur 3



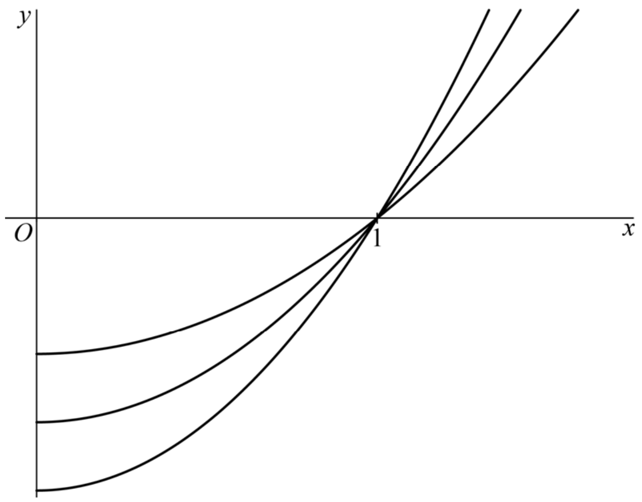
4p **12** Bereken de minimale lengte van lijnstuk OA. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Parabolen en sinusoïde

Op domein $[0, \rightarrow\rangle$ is gegeven de functie $f(x) = ax^2 - a$ met $a > 0$.

In figuur 1 is in één assenstelsel voor een aantal waarden van a de grafiek van f getekend.

figuur 1



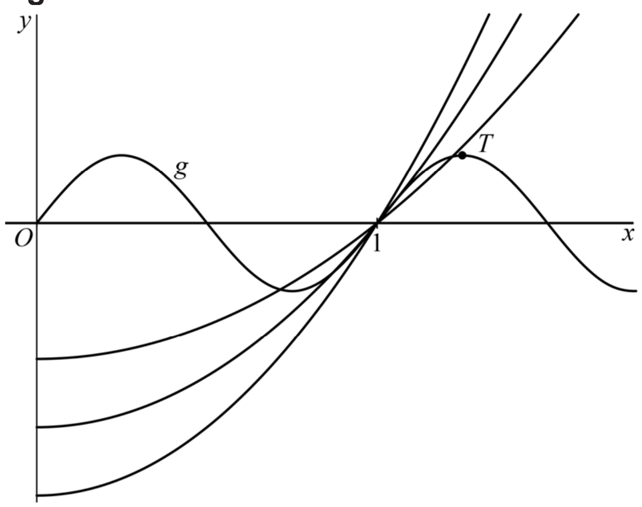
De grafiek van f gaat voor elke waarde van a door het punt $(1, 0)$.

2p **13** Bewijs dit.

Op hetzelfde domein is de functie g gegeven door $g(x) = \sin(2\pi x)$.

In figuur 2 is de grafiek van g aan figuur 1 toegevoegd.

figuur 2



Het punt T is de eerste top van de grafiek van g met x-coördinaat groter dan 1. Zie figuur 2.

Er is een waarde van a waarvoor de grafiek van f door T gaat.

5p **14** Bereken exact deze waarde van a.

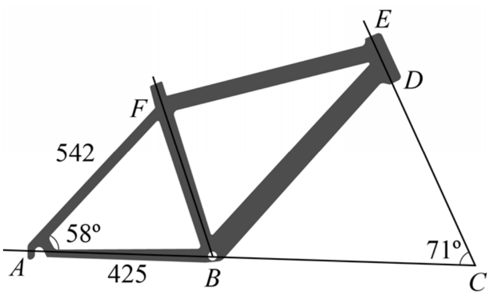
Fiets

Het comfort en het rijgedrag van een fiets worden in belangrijke mate bepaald door de framegeometrie. Naast de lengte van de verschillende buizen waaruit een frame bestaat, gaat het bij de framegeometrie ook om de hoeken waaronder de verschillende buizen staan.

In figuur 2 is een tekening van het frame van de fiets van figuur 1 gegeven.

figuur 1

figuur 2



De bijbehorende maten zijn:
- de liggende achtervork: $AB = 425$ mm;
- de staande achtervork: $AF = 542$ mm;
- de hoek die de liggende en de staande achtervork met elkaar maken: $\angle BAF = 58°$;
- de hoek die het verlengde van de stuurbuis DE met het verlengde van AB maakt: $\angle BCE = 71°$.

De zitbuis BF en de stuurbuis DE zijn bijna evenwijdig. Als ze evenwijdig zouden zijn dan zou de hoek die BF met de lijn door AB maakt even groot moeten zijn als $\angle BCE$. Deze hoeken verschillen echter.

6p **15** Bereken dit verschil. Geef je eindantwoord in hele graden.

Een crank is het verbindingsstuk tussen de trap-as van de fiets en het pedaal. Zie figuur 3.

figuur 3

Cranks bestaan in verschillende lengtes. Een fietser met lange benen heeft baat bij een langere crank.
Zo wordt aan iemand met een binnenbeenlengte van 75 cm een cranklengte van 166 mm geadviseerd. Aan iemand met een binnenbeenlengte van 97 cm wordt een cranklengte van 180 mm geadviseerd.

Er is een verband tussen de binnenbeenlengte B in cm en de geadviseerde cranklengte L in mm. Dit verband is te benaderen met een formule van de vorm $L = a \cdot B^n$. Met de bovenstaande gegevens bij binnenbeenlengtes 75 cm en 97 cm zijn de waarden van a en n te bepalen.

6p **16** Bereken volgens deze formule de geadviseerde cranklengte in mm bij een binnenbeenlengte van 86 cm. Geef je eindantwoord in hele mm.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.